AUNQUE SE TRATA DE UNOS RECIÉN LLEGADOS AL MUNDO DE LA RECREACIÓN MATEMÁTICA, NO ES NADA DIFÍCIL FAMILIARIZARSE CON ELLOS. SE TRATA DE LOS CUBOS MÁGICOS, UNA VARIANTE EN TRES DIMENSIONES DEL CÉLEBRE JUEGO DE LOS PENTOMINÓS.

• *Cubos mágicos*

Pentominós en tres dimensiones

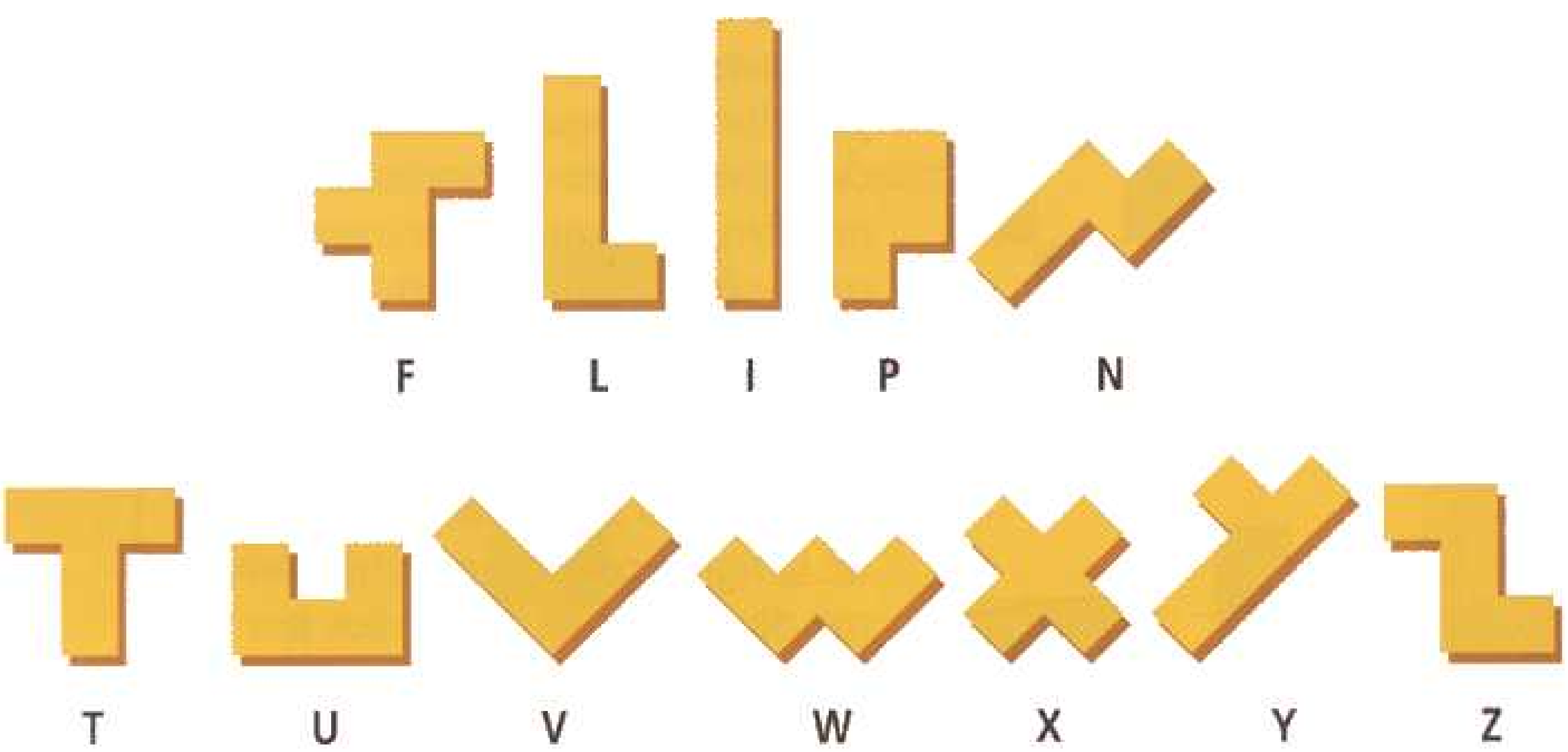
Los pentominós son figuras planas formadas por cinco cuadrados unidos por los lados, o dicho de otra manera, figuras que recubren cinco cuadros adyacentes de un tablero de ajedrez. Existen en total doce modos diferentes de unir cinco cuadrados, si consideramos idénticas las rotaciones y simetrías. Desde su primera aparición, hace de ello casi cien años, los pentominós han alcanzado una gran popularidad. La variante propuesta en este número consiste en una versión en tres dimensiones del original, lo cual nos permitirá construir tanto figuras sólidas como planas. Le invitamos, pues, a familiarizarse con este divertido juego, resolviendo viejas cuestiones y, por qué no, inventando nuevos desafíos.

▲ *Los artistas también utilizan los pentominós para dar libre curso a su creatividad. Aquí, el «Castillo mágico» de Günther Albrecht Bühler, uno de los más renombrados expertos en este campo.*

► *Con los pentominós se puede elaborar un sinfín de patrones: por ejemplo, esta figura en forma de cara.*

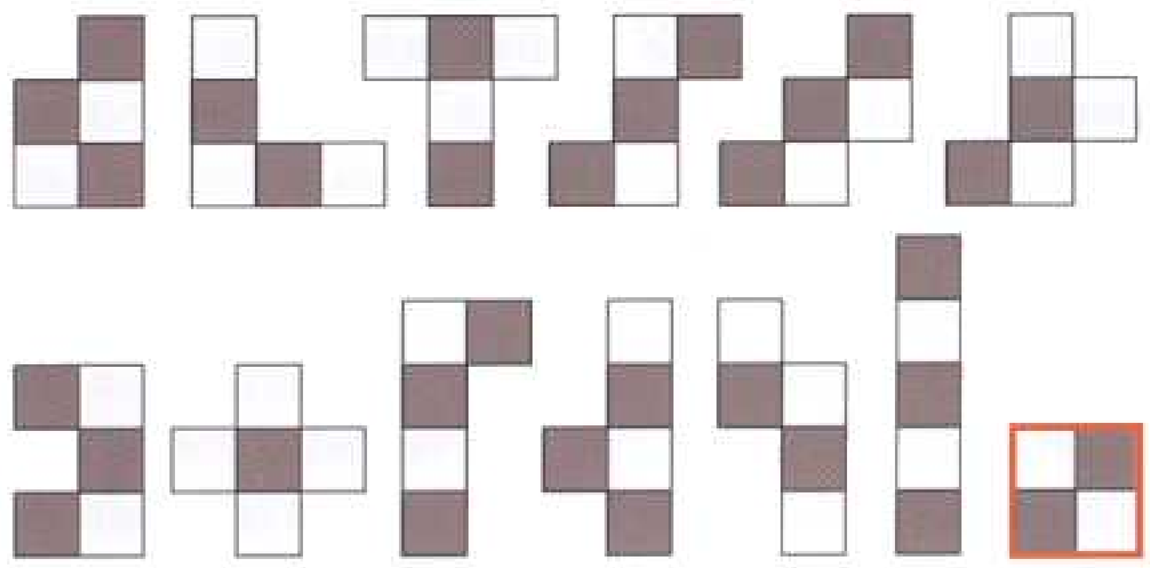
Los nombres de las piezas

Para simplificar la referencia a cada uno de los doce pentominós, el matemático Solomon W. Golomb buscó un nombre que los identificase: a tal fin, los bautizó uno por uno con el nombre de una letra a la que se parecía (en la figura). De ese modo, para repasar si nuestro juego de piezas está completo, se puede recurrir a la siguiente regla mnemotécnica: basta con recordar las consonantes y una «I» de la palabra FiLIPiNo («FLIPN»), junto con las últimas siete letras del alfabeto («TUVWXYZ»).



• El desafío original: reconstruir el tablero de ajedrez

El primero en utilizar estas piezas en un problema de ingenio fue el inglés Henry E. Dudeney (en *The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems*, de 1907). Dudeney propuso reconstruir un tablero de ajedrez con los 12 pentominós más el tetrominó cuadrado (aquí, silueteado en rojo).



En este puzzle las piezas estaban pintadas por un solo lado, es decir, que no eran reversibles.
No hay una sola manera de disponer los doce pentominós de tal modo que recubran el tablero de ajedrez dejando un hueco cuadrado de dos unidades de lado en el centro. Para calcular el número total de posibilidades se ha recurrido a la ayuda de los ordenadores. El resultado, obtenido por Dana S. Scott, es que hay sesenta y cinco modos de hacerlo, sin contar con todos los que se deducen de éstos por medio de giros y simetrías.

• Los poliominós: una gran familia

El término poliominós para denominar figuras formadas por la unión de un número cualquiera de cuadrados por sus lados, fue acuñado por el profesor Solomon W. Golomb en 1953. Años más tarde publicó *Polyominoes*, un libro dedicado al estudio

► *Solomon W. Golomb inventó los poliominós por casualidad, cuando, siendo estudiante en Harvard, tuvo la ocurrencia de matar el tedio de una clase dibujando pequeños cuadrados en una hoja de papel.*

de estas figuras. El término deriva de «dominó» (entendido como «di-ominó»). Así, las figuras formadas por 3 cuadrados se denominarían «triominós», las de 4, «tetrominós», y así sucesivamente pentominós, hexominós, etc. No obstante, cabe observar que el origen etimológico de la palabra dominó es todavía objeto de estudio y podría no coincidir con esta interpretación. He aquí un diseño en el que el nombre de Golomb se ha construido con los 12 pentominós:

• Regla de formación de los poliominós

Con la ayuda de los prefijos adecuados se pueden nombrar las sucesivas familias de poliominós. De un modo general, si se tiene un poliominó de «n» cuadrados de superficie, se dice que se tiene un n-ominó.

Por agregado de un cuadrado (monominó) a un n-ominó, se obtiene un (n+1)-ominó.

Con esta simple regla de formación, y teniendo en cuenta que el contacto entre dos cuadrados debe ser por lados completos, se pueden investigar todas las posiciones en que se ubicará el nuevo cuadrado, y de este modo construir de forma sucesiva las diferentes familias de poliominós. Sin embargo, con este sistema nos encontraremos con un problema, el hecho de que aparecen figuras repetidas. Queda entonces pendiente la tarea de dejar un único ejemplar de cada poliominó.

• Identidad y transformaciones geométricas

Para decidir qué piezas están repetidas y cuáles no, son necesarios unos criterios que nos digan en qué casos se puede considerar que dos figuras de poliominós distintas en apariencia cuentan como variantes de un mismo poliominó.

Estos criterios vienen dados por determinadas transformaciones geométricas y nos permiten hablar de poliominós «libres», «semilibres» y «fijos».

Cuando los poliominós se contemplan como libres, se decide que la identidad de un poliominó no cambia porque se lo rote en el plano ni tampoco porque se lo levante y voltee en el aire, dejando en el plano una figura que es la imagen en el espejo de la inicial. Se estipula que es el mismo poliominó, rotado o volteado desde su posición original.

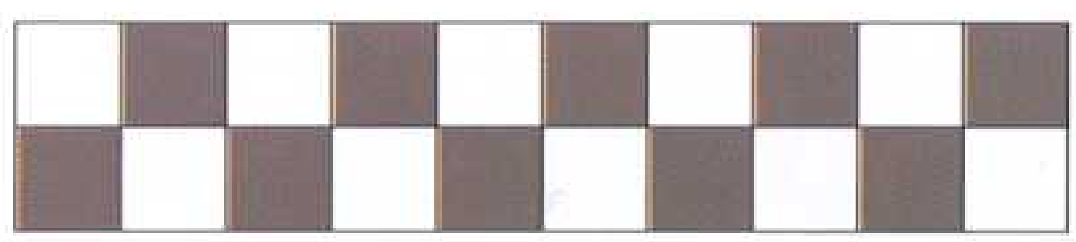
En el caso de los poliominós semilibres, no aceptamos que puedan cambiar de identidad por el hecho de rotarlos en el plano, pero sí por efecto de voltearlos en el espacio. Dicho de otro modo: al rotar en el plano una figura de poliominó obtenemos el mismo poliominó, pero un poliominó volteado que no se pueda obtener por una rotación plana cuenta como un poliominó semilibre distinto.

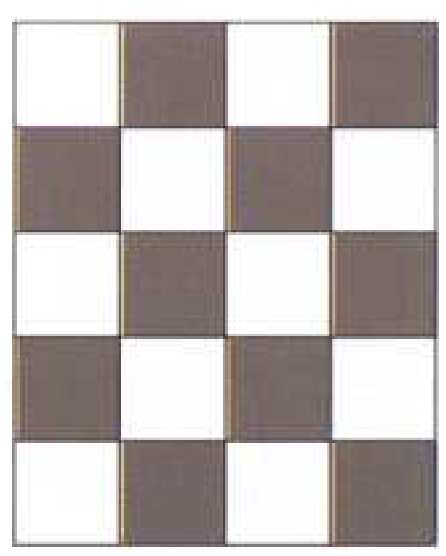
Por último, los poliominós fijos pierden su identidad con cualquiera de las transformaciones mencionadas. Cualquier rotación o simetría de una misma pieza puede producir una pieza distinta (véase recuadro página 3).

El TETRIS y los tetrominós

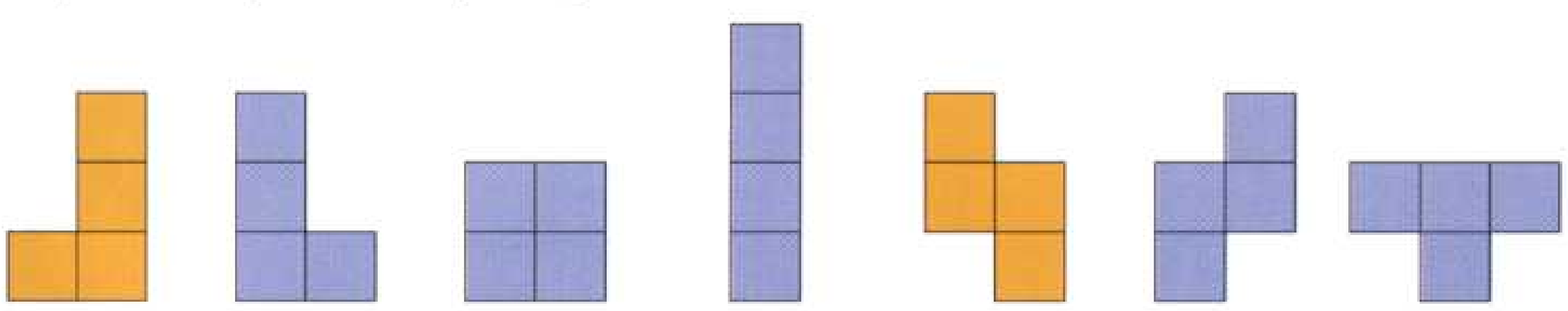
Los tetrominós semilibres son conocidos también como TETRIS, a partir de que fueran popularizados en un juego para ordenador. Tiempo después se crearon el PENTIS (con pentominós) y el BLOCK OUT, con tetrominós tridimensionales. Los tetris pueden rotar (y es esa justamente una característica del juego), pero no se voltean en el aire. En la figura que se ofrece bajo estas líneas se muestra un juego completo de TETRIS.

De estas siete piezas, las que están pintadas de azul representan los cinco tetrominós libres. Como uno de los retos básicos que plantean los poliominós consiste en averiguar si con ellos se pueden formar rectángulos, podríamos preguntar si ello es posible con los cinco tetrominós libres. Y la respuesta es que no. Ya que disponemos de veinte cuadros, el rectángulo debería ser de dos por diez o de cuatro por cinco. Coloreémoslo como si fuera un tablero de ajedrez:



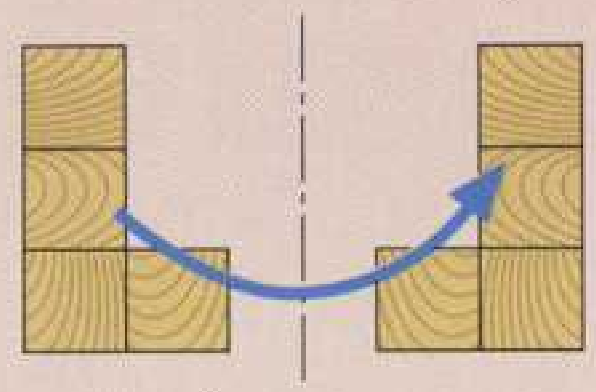


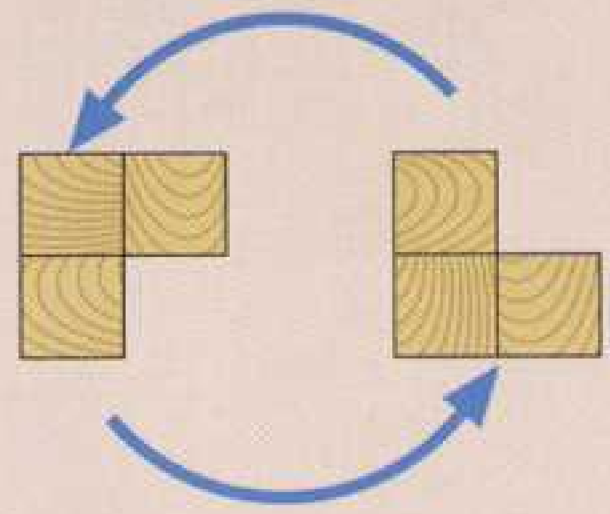
Cuatro de los tetrominós abarcan dos cuadros blancos y dos negros y el último, el que tiene forma de T, tres cuadros de un color y uno del otro. Por tanto, combinemos como combinemos los tetrominós, obtendremos una figura con un número impar de cuadros blancos y un número impar de cuadros negros. Pero los dos rectángulos de la figura contienen un número par de cuadros de cada color, por lo que el problema, efectivamente, es irresoluble.



Reflexión y rotación

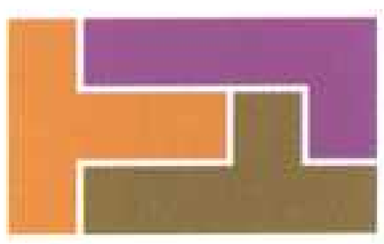
En la figura de la derecha superior se ven dos tetrominós en forma de «L», uno imagen especular del otro. Si los consideramos fijos resultan ser obviamente diferentes.
Si los consideramos semilibres, también, puesto que una rotación en el plano no nos permitirá pasar de uno al otro. Pero si los consideramos libres, resultan ser iguales, porque una rotación en el espacio permite obtener uno a partir del otro.
En la figura de la derecha inferior se ven dos triominós, uno rotado un cuarto de vuelta respecto del otro. Si los consideramos fijos, son diferentes. Pero si los consideramos libres o semilibres, son idénticos.





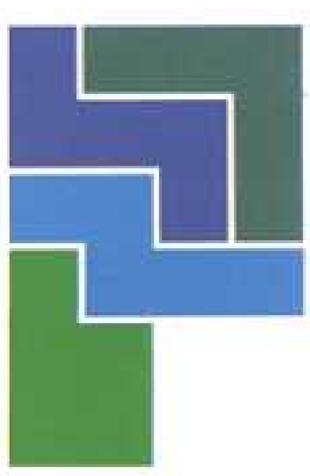
• A jugar con los pentominós

Veamos algunos solitarios que nos permitan familiarizarnos con las piezas. Utilizando sólo algunas de ellas:
1- Construir con tres piezas un rectángulo de 3 × 5, que es el mas pequeño que se puede formar. Hay varias soluciones; aquí mostramos una:

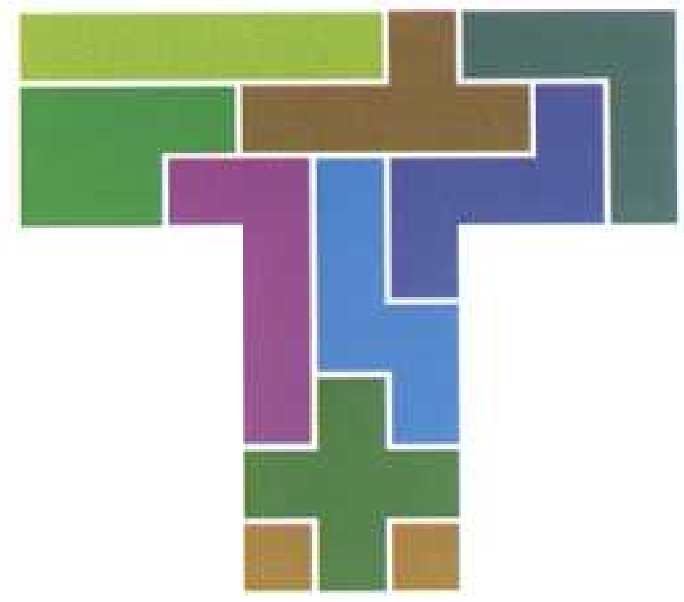


2- El cuadrado más pequeño que podemos armar es de 5 × 5. Le damos una solución. ¿Habrá otras?

3- Con cuatro pentominós se puede reproducir la forma de un pentominó, duplicada en tamaño (cuadruplicada en superficie). Dos de los pentominós no se pueden reproducir de este modo. Le mostramos uno que sí.
¿Se podrá resolver sin utilizar la pieza modelo?



4- Elija un pentominó que le servirá de modelo: con 9 de los restantes deberá formar un pentominó triplicado a lo largo y a lo ancho. Existe al menos una solución para cada uno de los 12 pentominós que usted elija. He aquí uno de muestra:



• Utilizando todas las piezas

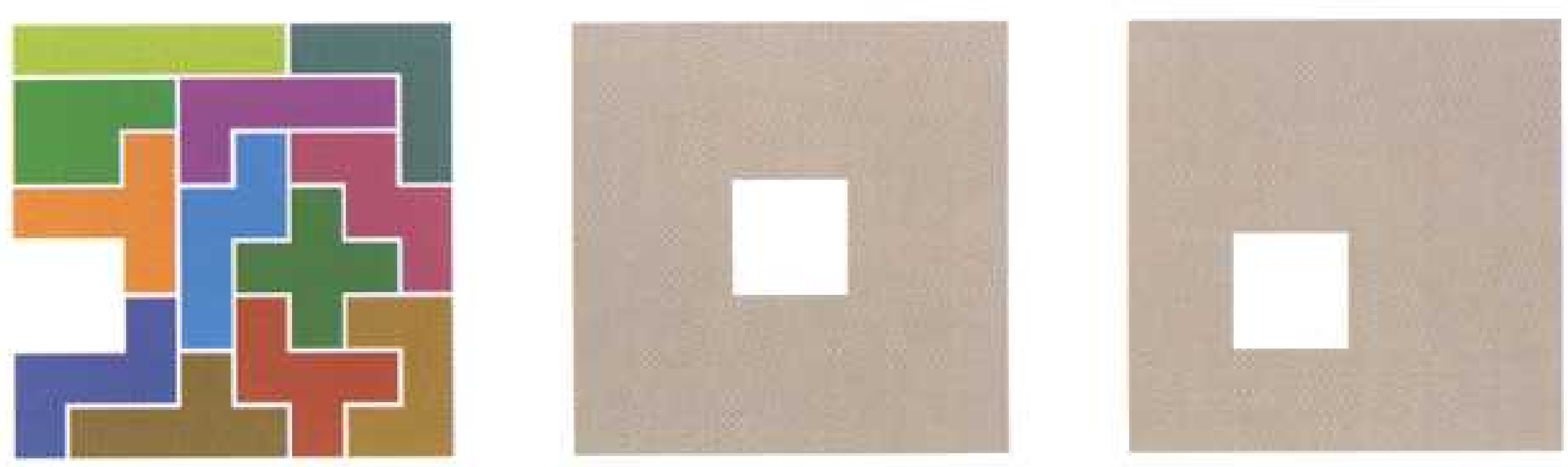
Los 12 pentominós comprenden en total 12 × 5 = = 60 cuadrados unitarios. Está demostrado que estas 12 piezas pueden cubrir diferentes rectángulos.

1- Construya dos rectángulos de 3 × 5 y 5 × 9 con piezas distintas.

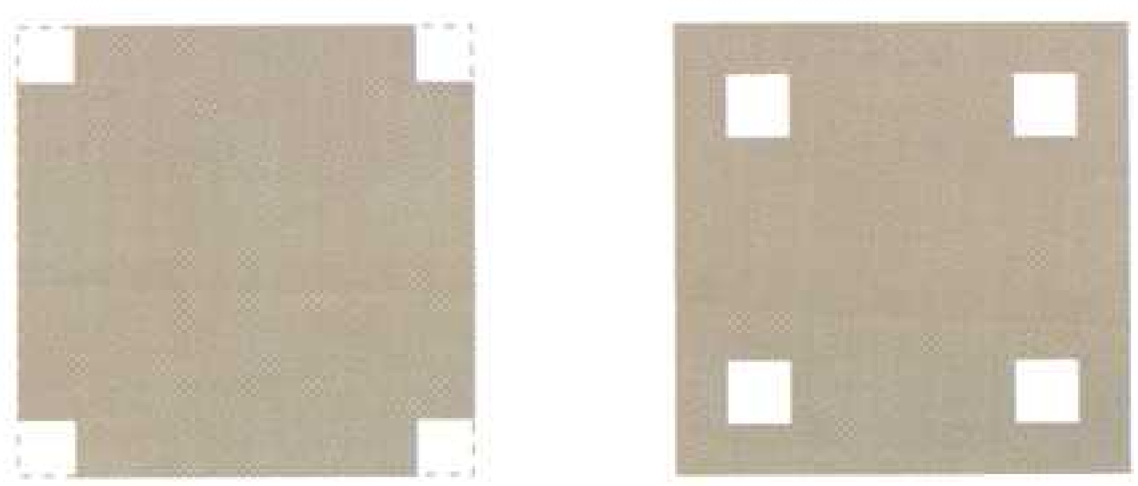
2- Con los pentominós I, N, T, V, W, Y, Z, construya un rectángulo de 5 × 7. Con los 5 que le quedan construya un cuadrado de 5 × 5.

Guardar el juego es cosa seria:

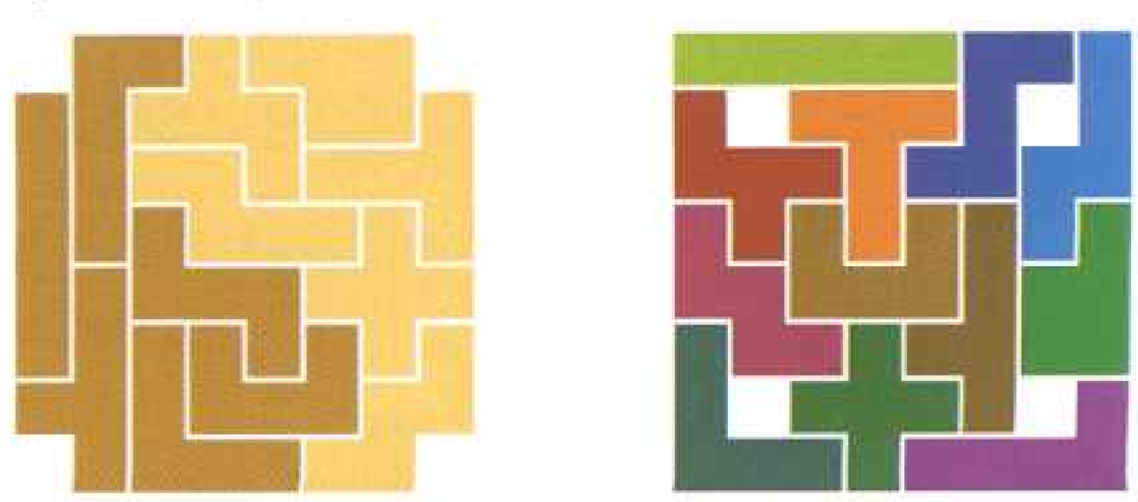
Para comenzar, resuelva el problema de Dudeney aprovechando que tiene en su poder las mismas piezas (pero en este caso no están pintadas y son reversibles). En la figura tiene usted tres desafíos, uno resuelto, los otros, no:



El reto consiste ahora en ubicar los doce pentominós, dejando los cuatro huecos en lugares prefijados:

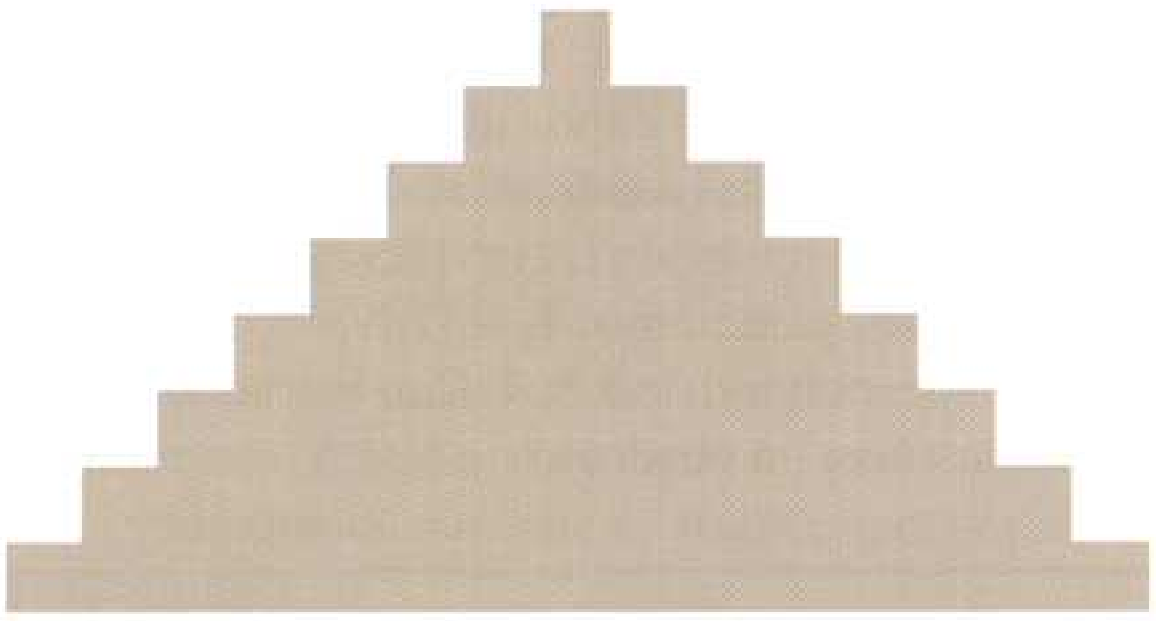


Soluciones:
en la solución de la izquierda se ha buscado representar el símbolo del yin – yang: las dos partes, de distinto color, son superponibles.



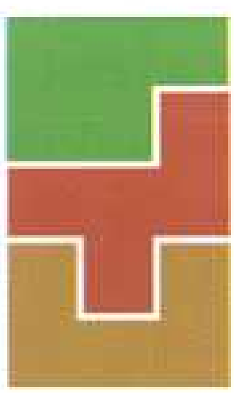
3- Aquí tiene un rectángulo de 5 × 6. Con las otras 6 piezas, construya otro rectángulo de 5 × 6.

4- En la siguiente figura podemos ver una pirámide integrada por 64 cuadrados unitarios, pirámide que puede cubrirse con los 12 pentominós y el tetrominó cuadrado de 2 × 2.

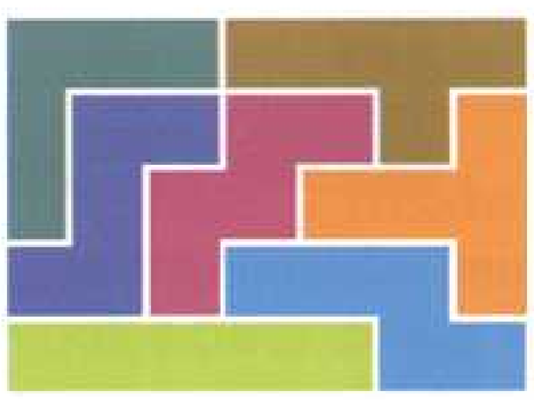


Algunas soluciones:

1-

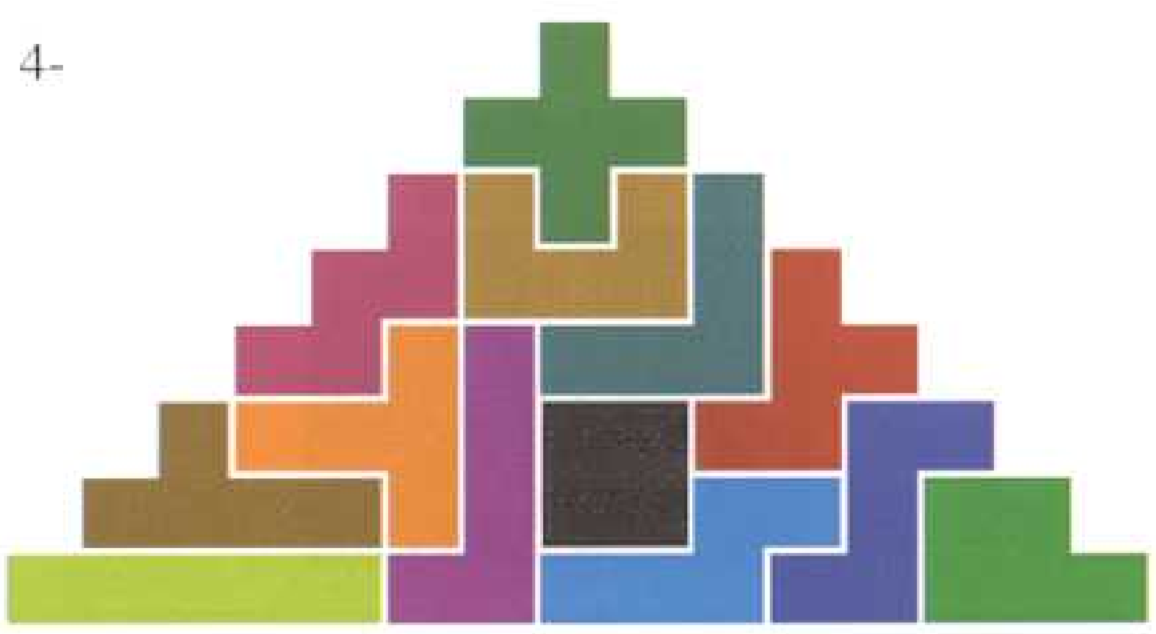


2-



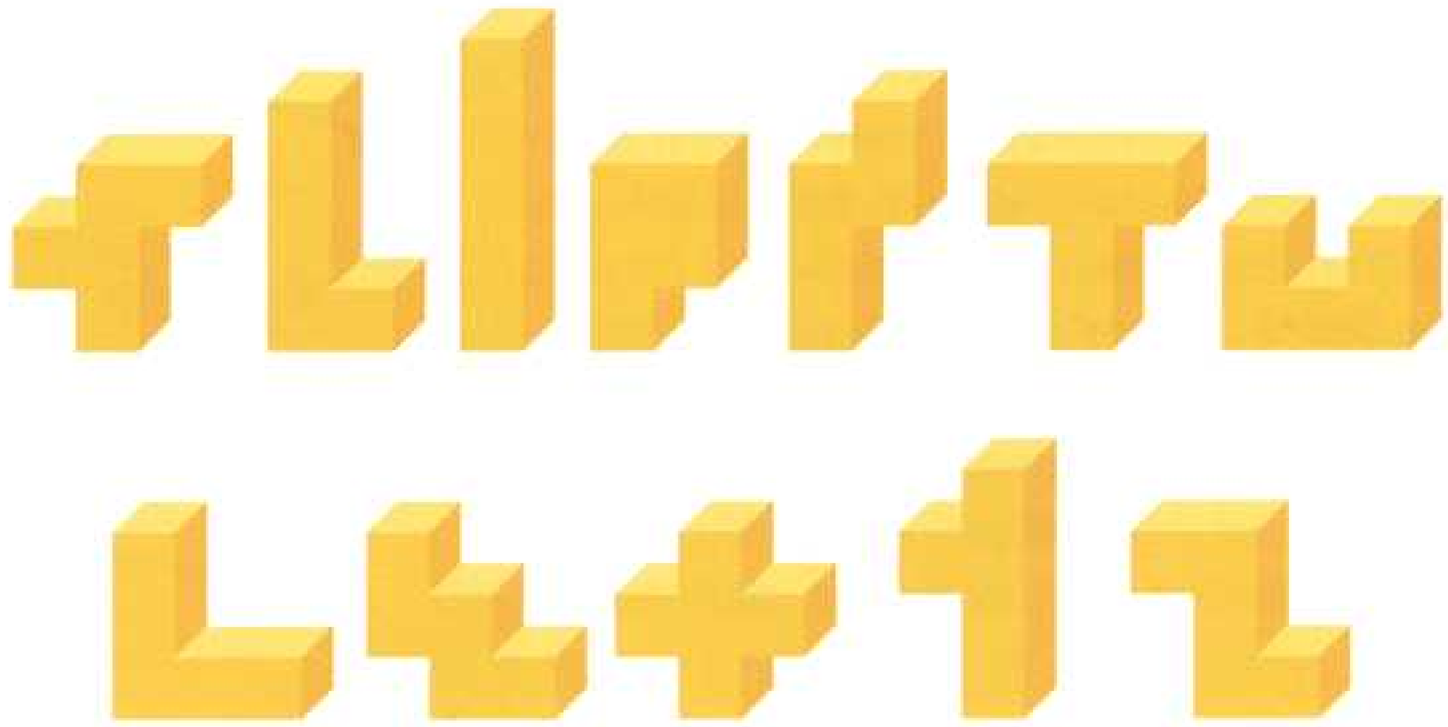
3-

4-



• Pentominós sólidos: los Cubos mágicos

El grupo de pentominós que se obtienen uniendo cubos en vez de cuadrados son denominados pentominós sólidos. Por tanto, si exceptuamos la pieza cuadrada central que ofrecemos para completar el cuadrado, nuestros cubos mágicos constituyen un repertorio completo de pentominós sólidos.



Con esta nueva dimensión podemos abordar nuevos problemas; por ejemplo, de «llenado» de volúmenes. He aquí algunas propuestas:

desafío 1: formar una caja de 2 × 3 × 10

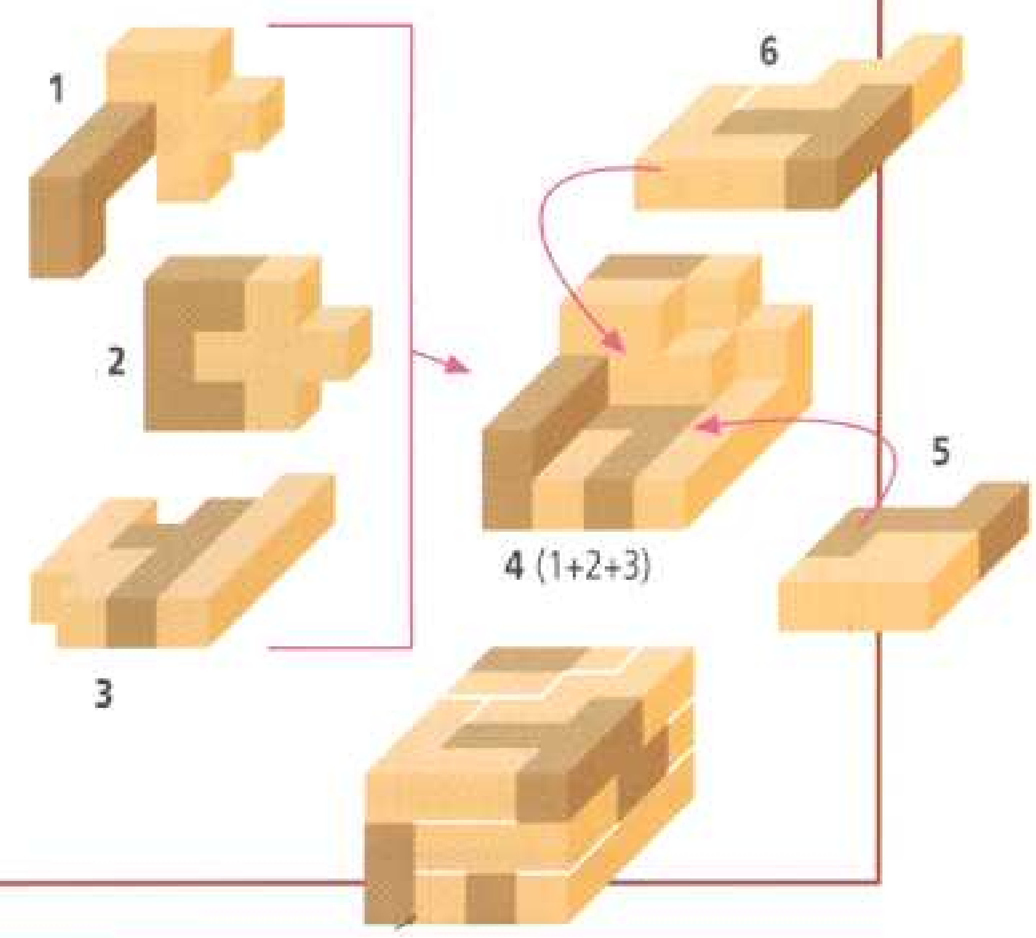
desafío 2: formar una caja de 2 × 5 × 6

desafío 3: formar una caja de 3 × 4 × 5

El análisis con el ordenador permite deducir que existen en total 12, 264 y 3.940 soluciones, respectivamente, para cada uno de los desafíos propuestos.

Cajas de pentominós

Al igual que los pentominós planos permiten formar rectángulos, los pentominós sólidos pueden dar origen a cajas, es decir, a paralelepípedos rectos. Una caja de 3 × 4 × 5 se construye formando primero cinco grupos de pentominós sólidos, tres de ellos con dos piezas (1 , 2 y 5 , en la figura) y dos con tres (3 y 6), y luego ensamblándolos en el orden prescrito.



Webs para ampliar información

http://clarkjag.idx.com.au/PolyPages/PolyX/index.htm?DSP.htm

Figuras con pentominós cortados en bisel.

http://commsci.usc.edu/faculty/golomb.html

El sitio de Golomb en la Red, de visita obligada.

Webs para jugar

http://www.snaffles.demon.co.uk/pentanomes/pentanomes.html

Un amplio elenco de figuras para pavimentar.

http://members.ets.com/crash/h/hindskw/pentomno.html

Jugar con pentominós sólidos.